

## MATEMATICA FINANCIERA

Estudia las operaciones financieras simples (interés y descuento) y complejas (rentas). Se entiende por operación financiera la sustitución de uno o más capitales por otro u otros equivalentes en distintos momentos de tiempo, mediante la aplicación de una ley financiera.

Importancia fundamental reviste el tema de las ecuaciones de valor para comprender el concepto del valor del dinero en el tiempo, los factores de las matemáticas financieras, los sistemas de amortización de deudas y los criterios para evaluar proyectos de inversión y alternativas operacionales.

### ECUACIÓN DE VALOR

Son aquellas que se utilizan para la resolución de problemas de matemáticas financieras en las cuales se reemplazan un conjunto de obligaciones, con diferentes fechas de vencimiento, por uno o varios valores con otra(s) fecha(s) de referencia, previo acuerdo entre el acreedor y el deudor.

Todo problema de matemática financiera puede ser resuelto mediante una ecuación de valor. Se debe tener presente que sólo se pueden sumar, restar o igualar dinero ubicado en una misma fecha, llamada fecha fechal.

### TERMINOLOGÍA Y SÍMBOLOS

P = valor presente o cantidad de dinero en tiempo '0', valor presente (VP).

F = valor futuro cantidad de dinero en un tiempo futuro, valor futuro (VF).

A = serie de cantidades de dinero consecutivas, iguales y del final del período. Valor anual (VA).

n = número de períodos de interés: años, meses, días.

i = tasas de interés o tasa de retorno por período; % anual, % mensual.

t = tiempo expresado en períodos: años, meses, días.

Las matemáticas financieras están gobernadas por seis fórmulas básicas que permiten manejar cualquier operación financiera o evaluar diversas alternativas de inversión.

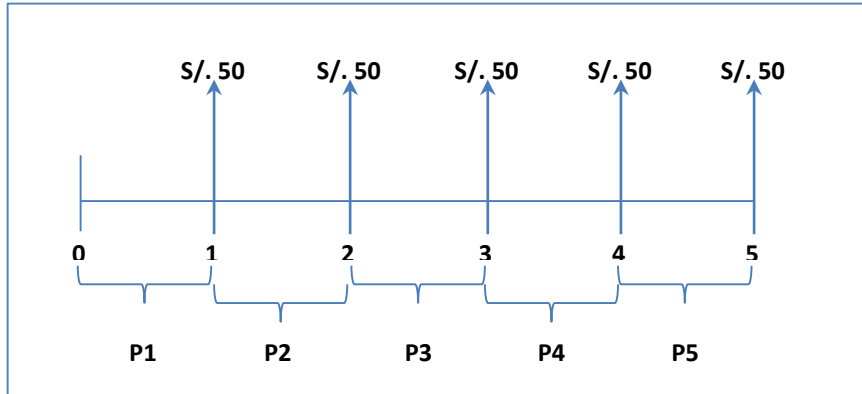
FÓRMULA	NOTACIÓN	FACTOR	DESCRIPCIÓN
Factor simple de capitalización	FSC	$(1 + i)^n$	Transforma el valor actual (VA) en valor futuro (VF).
Factor simple de actualización	FSA	$\frac{1}{(1 + i)^n}$	Transforma el valor futuro (VF) en valor actual (VA).
Factor de recuperación del capital	FRC	$\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$	Transforma un valor actual (inicial VA) en un flujo constante o serie uniforme.
Factor de actualización de una serie	FAS	$\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$	Permite pasar de series uniformes a valor actual.
Factor de capitalización de una serie	FCS	$\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$	Factor para pasar de series uniformes a valor futuro.
Factor de Depósito del Fondo de Amortización	FDFA	$\frac{i}{(1 + i)^n - 1}$	Factor utilizado para transformar valor final (VF) en flujos o series (depósitos) uniformes.

### FLUJO DE EFECTIVO

Los flujos de efectivo se refieren a mostrar las entradas y salidas de dinero. Pueden ser valores reales o estimados.

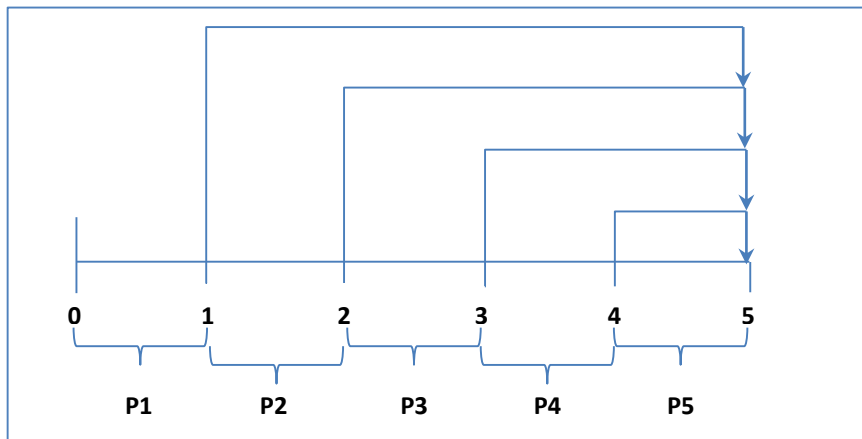
- **Entradas:** Rendimiento e ingresos en efectivo.
- **Salidas:** Gastos y costos en efectivo.

Es importante distinguir entre flujos al final de un período...

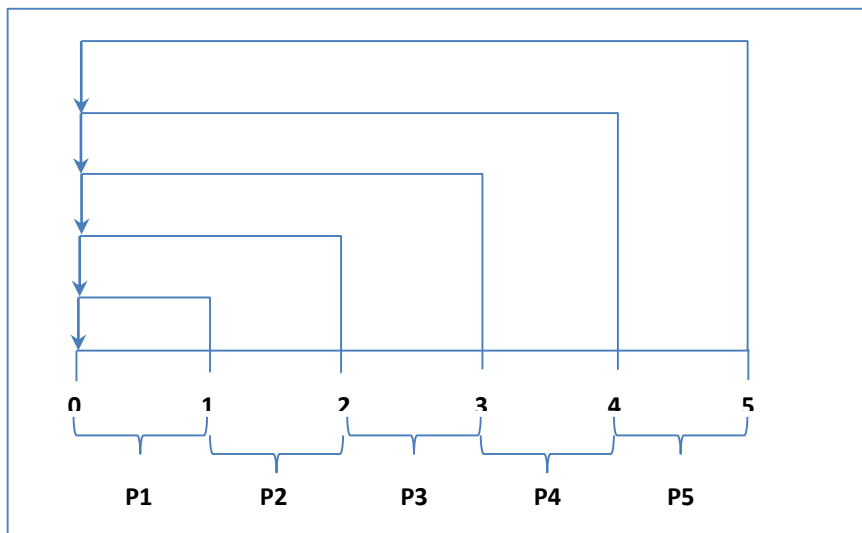


Para poder sumar los flujos en diferentes años, hay que convertirlos a una base común.

Esa base común puede ser algún periodo futuro...



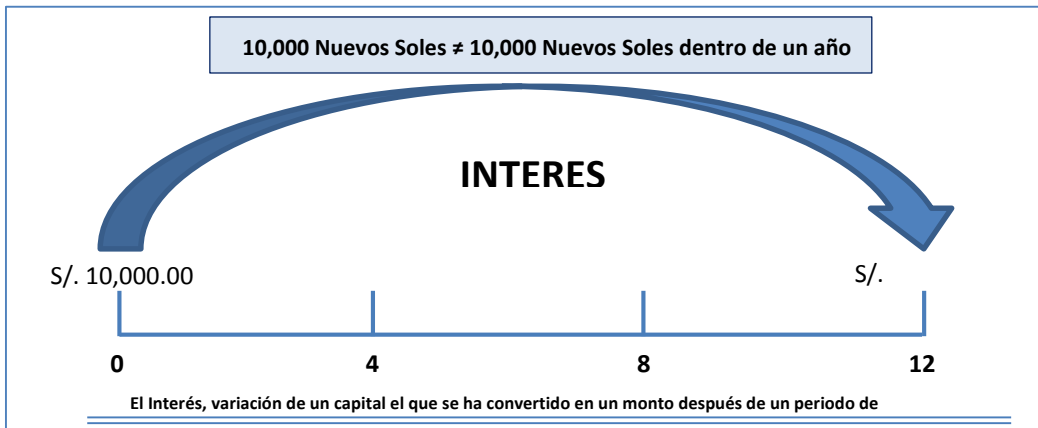
... o el periodo presente



### VALOR DE DINERO EN EL TIEMPO

Para entender la naturaleza del valor de una empresa o persona natural, hay que entender primero el valor del dinero.

El factor tiempo juega un papel decisivo a la hora de fijar el valor del dinero.



El dinero es un activo que cuesta conforme transcurre el tiempo

### Comparación y combinación de valores

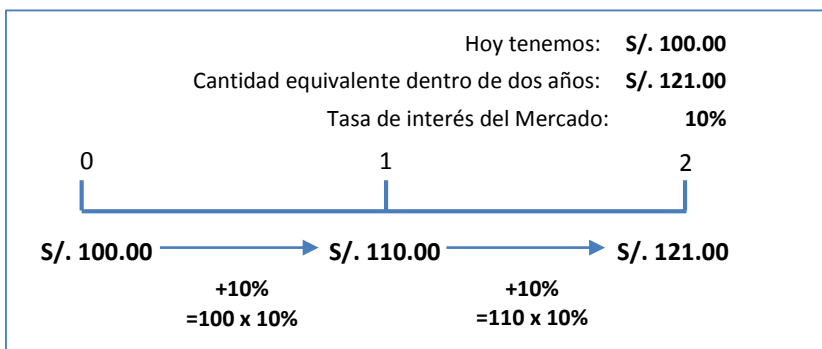
Sólo es posible comparar o combinar valores que estén en el mismo punto del tiempo.

**¿Por qué 10,000 nuevos soles hoy no valen lo mismo que 10,000 nuevos soles dentro de un año?**

- Pierden valor: Inflación.
- No sé si los voy a tener de vuelta (riesgo).
- Prefiero comprar cosas hoyo invertirlos.

### Mover flujos de efectivo en el tiempo hacia adelante

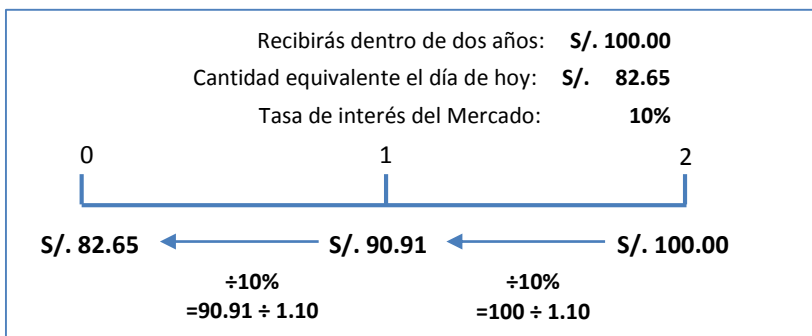
Para mover un flujo de efectivo hacia adelante en el tiempo debe capitalizarse.



El valor de un flujo de efectivo que se mueve hacia adelante en el tiempo se conoce como **valor futuro**. Este efecto de ganar intereses sobre intereses se conoce como **interés compuesto**

### Mover flujos de efectivo en el tiempo hacia atrás

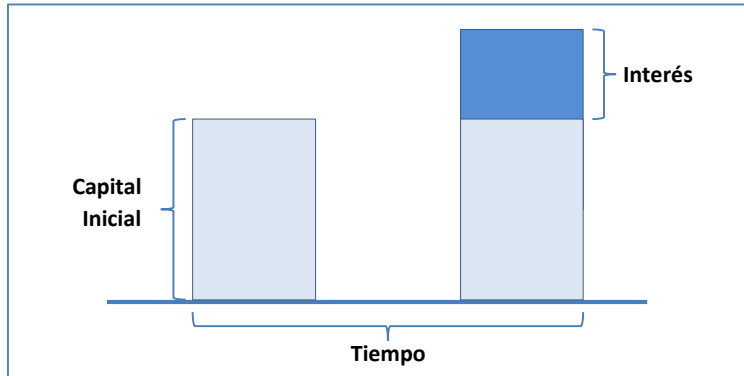
Para mover un flujo de efectivo hacia atrás en el tiempo debe descontarse.



La flecha apunta hacia la izquierda para indicar que el valor se mueve hacia atrás en el tiempo, es decir se descuenta. Observe que el valor disminuye entre más atrás se lleve el flujo de efectivo.

## EL INTERÉS

Interés es un índice utilizado para medir la rentabilidad de los ahorros o el coste de un crédito. Se expresa mediante un porcentaje. Es la manifestación del valor del dinero en el tiempo. El interés se paga cuando una persona u organización pide dinero prestado (obtiene un préstamo) y paga una cantidad mayor.



Es la diferencia que existe entre un monto o importe final y el importe original que lo produjo.

En términos reales, es la cantidad adicional que obtiene una persona al entregar determinada suma de dinero a otra, durante un tiempo determinado. La persona que recibe el dinero paga generalmente una suma superior a la recibida. Ese dinero es el interés y también es llamado costo de la deuda o servicio de la deuda. La cantidad de dinero entregado inicialmente se denomina capital, inversión inicial, principal o valor presente.

### El Interés del Prestatario

El interés que se paga por fondos que se piden prestados (préstamos) se determinan mediante la relación:

Interés = Cantidad que se debe ahora - Cantidad Original.

## TASA DE INTERÉS

Interés pagado con respecto a una unidad de tiempo (período de interés) específica expresada como porcentaje de la cantidad original (principal),

- I: Interés
- S: Monto
- P: Capital
- i: Tasa de Interés

$$i = \frac{S - P}{P}$$

$$(Interes) I = S - P$$

### Consideración:

Para evitar disputas entre deudores y acreedores por efecto de las irregularidades del calendario, pues todos los meses no tienen los mismos días, el Banco Central de Reserva del Perú ha normado que el año bancario se dé en un periodo de 360 días.

Entonces para propósitos de cálculos financieros, se considera meses de 30 días y años de 360 días.

## TASA DE RENDIMIENTO

La tasa de rendimiento de una inversión es aquella que se genera por el hecho de comprar un bien a un precio y venderlo a otro, que puede ser mayor o menor. Esta tasa resultará de aplicarla al valor inicial; también recibe el nombre de Tasa de Retorno (TR).

- **Tasa de rendimiento requerida:** es el rendimiento que refleja exactamente el grado de riesgos de efectivo esperados futuros, o es el rendimiento mínimo que una persona debe obtener para estar dispuesta a hacer una inversión.

- **Tasa de rendimiento esperada:** es lo que usted esperarías recibir si hace una inversión.
- **Tasa de rendimiento realizada:** es el rendimiento que realmente se obtuvo durante un período dado de tiempo. Es una consecuencia, es el resultado de haber tomado la decisión de invertir.

$$\text{Tasa de Rendimiento (\%)} = (\text{Interés acumulado por unidad de tiempo} / \text{Cantidad Original}) * 100$$

### TIPO DE INTERÉS

Indica qué porcentaje de una cantidad de dinero y tiempo dados se obtendría o habría que pagar en el caso de un crédito.

### INTERÉS SIMPLE

En una operación de INTERÉS SIMPLE el capital que genera los intereses permanece constante durante el tiempo de vigencia de la transacción.

- I: Interés, ganancia, crédito o devengado.
- P: Principal, Capital inicial, valor presente.
- i: Tasa de interés simple por unidad de tiempo.
- t: Numero de períodos de tiempo (días, meses, etc.).

$$I = P \times i \times t$$

Se llama 'Monto Final' o 'Capitalización' o 'Valor Futuro' a la suma del capital inicial y el interés ganado, es decir:

$$F = P + I$$

ó

$$F = P(1 + i \times t)$$

F = Monto o valor futuro luego de 't' períodos.

Debe entenderse que si 'i' es anual, 't' es el número de años; del mismo modo si 'i' es mensual, 't' es el número de meses.

#### Ejemplo:

José Villanueva pide prestado un capital inicial de 1000 nuevos soles a una tasa de interés del 20% anual, ó 5% trimestral. El monto de interés por pagar en el año es de:

$$I = 1000 \times 0.2 \times 1$$

$$I = 200 \text{ Nuevos Soles/año}$$

TRIMESTRE	CAPITAL INICIAL	INTERES	MONTO FINAL
1	1000	50	1050
2	1050	50	1100
3	1100	50	1150
4	1150	50	1200
		200	Nuevos Soles

#### Ejemplo:

¿Cuál será el interés acumulado en 180 días por un depósito de ahorro de 1000 nuevos soles, percibiendo una tasa de interés simple de 24% anual?

#### Solución:

- Homogenizando 'i' y 't' (Tasa y tiempos anuales)

$$I = 1000 \times 0.24 \times (180/360)$$

$$I = 120 \text{ Nuevos Soles}$$

- Homogenizando 'i' y "t' (Tasa y tiempos diarios)

$$I = 1000 \times (0.24/360) \times 180$$

$$I = 120 \text{ Nuevos Soles}$$

### Tasa Nominal

Una tasa nominal solamente es una definición o una forma de expresar una tasa efectiva. Las tasas nominales no se utilizan directamente en las fórmulas de la matemática financiera. En tal sentido, las tasas de interés nominales siempre deberán contar con la información de cómo se capitalizan.

Es una tasa de referencia para un período determinado que puede ser anual, trimestral, mensual, etc.

#### Ejemplo:

- 48% nominal anual.
- 24% nominal semestral.
- 4% nominal mensual.
- Esta tasa sólo puede ser transformada proporcionalmente, es decir, debe ser multiplicada o dividida.
- En el régimen de interés simple, multiplicamos o dividimos una tasa nominal. La tasa resultante será también una tasa nominal.

### Tasa Proporcional

Una vez elegida la unidad de tiempo con el cual se realizarán los cálculos financieros, se determina la fracción o proporción de la tasa nominal correspondiente.

A la tasa hallada se le denomina tasa proporcional, la cual depende de la unidad de tiempo que se elige para trabajar.

**Ejemplo:** Si tenemos una tasa de 48% nominal anual y deseamos hallar la proporcional trimestral, el procedimiento sería el siguiente:

$$\% \text{ trimestral} = 48\% / 4 = 12\% \text{ trimestral}$$

Es importante mencionar que estas tasas proporcionales siguen siendo nominales. De este modo, debe quedar claro que en el régimen de interés simple sólo se trabaja con tasas nominales.

### Tasa de costo de oportunidad

La tasa de costo de oportunidad se define como la mayor tasa de rentabilidad posible de obtener entre todas las alternativas de inversión factibles de ejecutar en un determinado punto en el tiempo; en consecuencia, detrás de cada tasa costo de oportunidad hay una alternativa de inversión que genera dicha tasa.

## INTERÉS COMPUESTO

Se calcula sobre el monto que hayal final de cada período de capitalización.

Es la base de muchas operaciones comerciales.

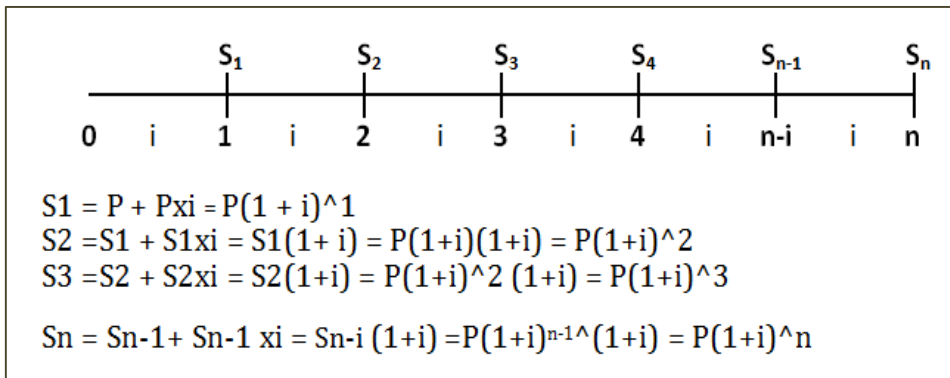
En el medio financiero es usual pagar intereses sobre el interés y sobre el capital inicial.

Esto constituye el proceso de capitalización denominado Interés Compuesto.

En una tasa anual, la cual puede ser capitalizada en forma continua, diaria, mensual, bimensual, trimestral o semestral.

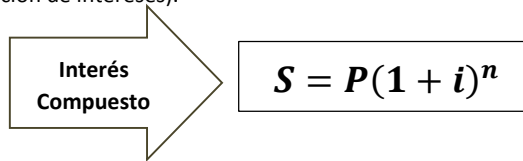
### Cálculo del Monto

Si tenemos un capital (P) que gana una tasa (i) por periodo durante 'n' períodos capitalizables, tendríamos al final del horizonte temporal el monto 'S' siguiente:



Interés compuesto es la suma de la ganancia del capital y de los intereses acumulados en períodos anteriores. El interés del período se incrementa al capital (capitalización de intereses).

- S: Valor futuro o monto final.
- P: Valor presente o capital inicial.
- n: Número de períodos.
- i: Tasa de interés por pagar en el período.



Es importante tener en cuenta que el interés efectivo anual que resulta bajo la modalidad del interés compuesto depende del interés por período y del número de estos.

'n' e 'i' necesariamente deben estar expresadas en la misma unidad de tiempo (años, trimestres, meses, días, etc.).

El factor  $(1 + i)^n$  se conoce como el FACTOR SIMPLE DE CAPITALIZACIÓN COMPUESTO 'FSC'.

**Ejemplo:**

Se tienen 1000 Nuevos Soles en una cuenta de ahorros al 6% anual capitalizable trimestralmente.

¿Cuál es el monto a cobrar al final del año?

**Solución:**

i nominal trimestral =  $6/4 = 1.5\%$

TRIMESTRE	CAPITAL INICIAL	INTERES	MONTO FINAL
1	1,000.00	15.00	1,015.00
2	1,015.00	15.23	1,030.23
3	1,030.23	15.45	1,045.68
4	1,045.68	15.69	1,061.36
		61.364	Nuevos Soles

$S = P (1 + i)^n$

$S = 1000 ( 1 + 0.015 ) ^ 4$

$S = 1061.36$  Nuevos Soles

**Ejemplo:**

Calcule el monto de un depósito inicial de 2000 Nuevos Soles durante 5 meses en un Banco que paga una tasa efectiva mensual del 4%.

$S = P (1 + i)^n$

$S = 2000 ( 1 + 0.04 ) ^ 5$

$S = 2433.31$  Nuevos Soles

## TASA DE INTERÉS EFECTIVA

La tasa efectiva  $i_{ef}$  para  $n$  períodos de capitalización puede obtenerse a partir de una tasa nominal anual si es capitalizable  $m$  veces en el año de acuerdo a la siguiente fórmula:

Dónde:

$i_n$  = tasa de interés nominal anual.

$m$  = número de períodos de capitalización dentro del año.

$n$  = número total de períodos.

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{i_n}{m}\right)^n - 1$$

## TASA EQUIVALENTE

Las tasas efectivas son las que capitalizan o actualizan un monto de dinero. En otras palabras, son las que utilizan las fórmulas de la matemática financiera.

Ahora bien, las tasas de interés efectivas pueden convertirse de un período a otro, es decir, se pueden hallar sus tasas de interés efectivas equivalentes. En otras palabras, toda tasa de interés efectiva de un período determinado de capitalización tiene su tasa de interés efectiva equivalente en otro período de capitalización.

Una diferencia notoria con la tasa de interés nominal es que la efectiva no se divide ni se multiplica. Las tasas nominales pueden ser transformadas a otras proporcionalmente, pero el período de capitalización sigue siendo el mismo.

Un capital puede ser capitalizado con diferentes tasas efectivas, las mismas que se relacionan con diferentes períodos de capitalización, pero el horizonte de capitalización puede ser el mismo.

Dos o más tasas son equivalentes cuando capitalizándose en períodos distintos, generalmente menores a 1 año, el monto final obtenido en igual plazo es el mismo.

$$i_{eq} = \left(1 + i\right)^{\frac{neq}{nef}} - 1$$

- $i_{ef}$  : tasa de interés efectiva del período
- $neq$  : número de días de la tasa equivalente que se desea hallar
- $nef$ : número de días de la tasa efectiva dada

### Ejemplo:

Supongamos que tenemos un capital de S/. 100 Y se deposita en una cuenta de ahorros que paga una tasa efectiva mensual del 2%. Se desea hallar la tasa efectiva anual.

$$i_{eq} = \left[ \left(1 + 2\%\right)^{\frac{360}{30}} \right] - 1 = 26.82\%$$

El horizonte de tiempo de la operación financiera es de un año, por lo que el coeficiente ' $nef$ ' es 360 días; y el coeficiente ' $ie_f$ ' es 30 días porque la capitalización es cada mes. Luego para obtener la  $i_{eq}$  simplemente se resuelve la ecuación cuyo resultado es 26.82%. Este resultado se interpreta de la siguiente manera: "si un capital se invierte ya sea en un depósito bancario o en un préstamo, y si este capital se capitaliza mensualmente a una tasa efectiva mensual del 2%, a lo largo de un año, la ganancia será del 26.82%".



**FACTORES DE PAGO ÚNICO (F/P Y P/F)**

Los factores de pago único, consideran el tiempo y la tasa de interés. Luego, ellos constituyen el camino adecuado para la transformación de alternativas en términos de una base temporal común. Estos factores son deducidos con base a la generación del interés compuesto para determinar la cantidad futura o presente en un momento dado del tiempo.

Es el que determina la cantidad de dinero F que se acumula después de 'n' períodos, a partir de un único valor presente P con interés compuesto una vez por período.

$$F = P(1 + i)^n$$

Si se invierte la situación para calcular el valor "P" para una cantidad dada 'F' que ocurre 'n' períodos en el futuro, entonces hallamos "P".

$$P = F \left( \frac{1}{(1 + i)^n} \right)$$

**FACTORES DE VALOR PRESENTE Y DE RECUPERACIÓN DE CAPITAL EN SERIES UNIFORMES (P/A Y A/P)**

Es utilizado para calcular el valor presente P equivalente en el año 0 para una serie uniforme de final de período de valores A, que empiezan al final del período 1 y se extiende durante 'n' periodos.

$$P = A \left( \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right)$$

Con él se calcula el valor anual uniforme equivalente 'A' durante "n" años de una 'P' dada en el año '0', cuando la tasa de interés es 'i'.

$$A = P \left( \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right)$$

**FACTORES FONDO DE AMORTIZACIÓN Y EL FACTOR DE CANTIDAD COMPUESTA SERIE UNIFORME (A/F Y F/A)**

El Factor (A/F) es el factor de fondo de amortización o A/F, el cual determina la serie de valor anual uniforme que sería equivalente a un valor futuro F.

$$A = F \left( \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right)$$

$$F = A \left( \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right)$$

## NOTACIONES Y ECUACIONES

Fórmula	Notación	Factor	Fórmula	Función Excel
Factor simple de capitalización	FSC	$(1 + i)^n$	$F = P(1 + i)^n$	<b>VF(tasa,num_per,[va])</b>
Factor simple de actualización	FSA	$\frac{1}{(1 + i)^n}$	$P = F \left( \frac{1}{(1 + i)^n} \right)$	<b>VA(tasa,num_per,[vf])</b>
Factor de recuperación del capital	FRC	$\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$	$A = P \left( \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right)$	<b>PAGO(tasa,nper,va)</b>
Factor de actualización de una serie	FAS	$\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$	$P = A \left( \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right)$	<b>VA(tasa,num_per,pago)</b>
Factor de capitalización de una serie	FCS	$\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$	$F = A \left( \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right)$	<b>VF(tasa,num_per,pago)</b>
Factor de Depósito del Fondo de Amortización	FDFA	$\frac{i}{(1+i)^n - 1}$	$A = F \left( \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right)$	<b>PAGO(tasa,nper,vf)</b>